

# Notes sur l'indice des algèbres de Lie (I)

par : Mustapha RAÏS <sup>1</sup>

On trouvera ci-dessous :

- Des démonstrations de certains des résultats obtenus récemment par D. Panyushev.
- Un complément portant sur "l'inégalité de Panyushev".
- Des calculs d'indices de certaines contractées d'algèbres de Lie.
- Des exemples d'additivité de l'indice des algèbres de Lie.
- Des questions qui peuvent intéresser le lecteur.

Je remercie Dmitri Panyushev pour l'impulsion donnée par ses multiples travaux sur l'indice des algèbres de Lie et pour la gentillesse avec laquelle il a répondu à mes multiples questions.

Notations : Les notations sont en général celles de [Dix]. On se reportera à [Ra] pour la définition de l'indice d'une représentation linéaire d'une algèbre de Lie ; en particulier :

- Lorsque  $\mathfrak{a}$  est un idéal d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , l'indice de la représentation naturelle de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{a}$ , sera noté  $\text{ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  comme dans [Pa].
- Lorsque  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ , elle opère naturellement dans l'espace vectoriel  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ , et on notera  $\text{ind}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$  l'indice de cette représentation de  $\mathfrak{h}$ .

## 1 L'inégalité de Panyushev

**1.1.** On aura besoin du résultat élémentaire et classique suivant : soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie,  $\mathfrak{a}$  un idéal de  $\mathfrak{g}$ ,  $\ell$  une forme linéaire sur  $\mathfrak{g}$ ,  $\ell_0$  la restriction de  $\ell$  à  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}^\ell$  l'orthogonal de  $\mathfrak{a}$  relativement à la forme  $B_\ell$  associée à  $\ell$ ,  $\ell_1$  la restriction de  $\ell$  à  $\mathfrak{h}$ . Alors :  $\mathfrak{h}^{\ell_1} = \mathfrak{a}^{\ell_0} + \mathfrak{g}^\ell$ . (En effet :  $\mathfrak{h}^\ell = (\mathfrak{a}^\ell)^\ell = \mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell$  et  $\mathfrak{h}^{\ell_1} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\ell = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^\ell = \mathfrak{a}^{\ell_0} + \mathfrak{g}^\ell$ ). (Voir [Dix], 1.12.4.(i).)

**1.2.** Dans [Pa], Panyushev démontre :

**1.4. Théorème :** Soit  $\mathfrak{a}$  un idéal dans une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . On a alors (ce qu'on appellera dans la suite l'inégalité de Panyushev) :  $\text{ind}(\mathfrak{g}) + \text{ind}(\mathfrak{a}) \leq \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) + 2 \text{ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ .

UNE DÉMONSTRATION : Soient  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}^*$ ,  $\ell_0 = \ell|_{\mathfrak{a}}$ ,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}^\ell$ , de sorte que :  $\mathfrak{a}^{\ell_0} + \mathfrak{g}^\ell \subset \mathfrak{h}$  (précisément  $\mathfrak{a}^{\ell_0} + \mathfrak{g}^\ell = \mathfrak{h}^{\ell_1}$ , avec  $\ell_1 = \ell|_{\mathfrak{h}}$ ). On écrit simplement :  $\dim(\mathfrak{a}^{\ell_0} + \mathfrak{g}^\ell) \leq \dim \mathfrak{h}$ .

. Sachant que  $\mathfrak{a}^{\ell_0} \cap \mathfrak{g}^\ell = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}^\ell$  est l'orthogonal (dans  $\mathfrak{a}$ ) du sous-espace  $\mathfrak{g}.\ell_0$  de  $\mathfrak{a}^*$ , il vient  $\dim(\mathfrak{a}^{\ell_0} \cap \mathfrak{g}^\ell) = \text{codim}(\mathfrak{g}.\ell_0)$ .

---

<sup>1</sup>Université de POITIERS - Département de Mathématiques - Téléport 2, Boulevard Marie et Pierre Curie - BP 30179 - 86962 FUTUROSCOPE CHASSENEUIL Cedex

. On a :  $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{a}^\ell = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{a} + \dim(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}^\ell) = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) + \text{codim}(\mathfrak{g}.\ell_0)$ .

On a donc :  $\dim \mathfrak{a}^{\ell_0} + \dim \mathfrak{g}^\ell \leq \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) + 2 \text{codim}(\mathfrak{g}.\ell_0)$ .

D'où :  $\text{ind}(\mathfrak{g}) + \text{ind}(\mathfrak{a}) \leq \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) + 2 \text{codim}(\mathfrak{g}.\ell_0)$  et ce, pour toute forme linéaire  $\ell_0$  sur  $\mathfrak{a}$ .

Par suite :

$$\text{ind}(\mathfrak{g}) + \text{ind}(\mathfrak{a}) \leq \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) + 2 \text{ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}).$$

## 2 L'indice du normalisateur d'un centralisateur

**2.1.** Soit  $e$  un élément nilpotent d'une algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$  (le corps de base est, pour moi, le corps des complexes). On note  $z$  le centralisateur de  $e$  (dans  $\mathfrak{g}$ ),  $\eta$  le normalisateur de  $z$  (dans  $\mathfrak{g}$ ) et  $\delta$  le centre de  $z$ . Dans [Pa], Panyushev démontre :

4.4. (ii) **Théorème** : *Sous l'hypothèse "ind( $\eta, \delta$ ) = 0", on a :  $\text{ind}(\eta) = \text{ind}(z) - \dim \delta$  et  $\text{ind}(\eta, z) = \text{ind}(\eta)$ .*

UNE DÉMONSTRATION : Soit  $\ell$  une forme linéaire sur  $\eta$ . On applique 1.1. avec  $\mathfrak{g} = \eta$   $\mathfrak{a} = \delta$  ; avec  $\mathfrak{h} = \delta^\ell$  et  $\ell_1 = \ell|_{\mathfrak{h}}$ , on a donc :  $\mathfrak{h}^{\ell_1} = \delta + \eta^\ell$  ( $\delta^{\ell_0} = \delta$  puisque  $\delta$  est abélien) et clairement :  $\mathfrak{h}^{\ell_1} = \mathfrak{h}^\ell$ .

- Il est immédiat que : " $\delta \cap \eta^\ell = \{0\}$ " ssi " $\eta.\ell_0 = \delta^*$ ", i.e. ssi " $\text{ind}(\eta, \delta) = 0$  et  $\ell_0$  est un élément régulier de  $\delta^*$ ".

- Notons  $B : \delta \times \eta \longrightarrow \mathbb{C}$  la forme définie par :  $B(x, y) = \langle \ell, [x, y] \rangle$ . On voit que  $B(x, y) = 0$  pour tout  $y$  dans  $\eta$  équivaut à :  $x \in \delta \cap \eta^\ell$ , et  $B(x, y) = 0$  pour tout  $x$  dans  $\delta$  équivaut à :  $y \in \delta^\ell$ . Comme  $\delta$  et  $\eta/z$  ont même dimension ([B-K]), il vient que les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\eta.\ell_0 = \delta^*; B \text{ induit une dualité entre } \delta \text{ et } (\eta/z); \delta^\ell = z.$$

- Supposons donc  $\eta.\ell_0 = \delta^*$ . Avec  $\ell_1 = \ell|_z$ , on a alors :

$$z^{\ell_1} = \delta \oplus \eta^\ell \quad \text{et} \quad z^{\ell_1} = z^\ell.$$

. De  $z^{\ell_1} = \delta \oplus \eta^\ell$ , il résulte :  $\dim z^{\ell_1} = \dim \delta + \dim \eta^\ell$ .

. De  $z^\ell = z^{\ell_1}$ , il résulte :  $\dim \eta.\ell_1 = \dim \eta - \dim z^\ell = \dim z + \dim \delta - (\dim \delta + \dim \eta^\ell) = \dim z - \dim \eta^\ell$ , d'où  $\text{codim}(\eta.\ell_1) = \dim \eta^\ell$ . En résumé :

$$\dim z^{\ell_1} = \dim \delta + \dim \eta^\ell$$

$$\text{codim}(\eta.\ell_1) = \dim \eta^\ell.$$

Le corps de base étant le corps des complexes, on déduit des deux égalités précédentes :

$$\text{ind } z = \dim \delta + \text{ind}(\eta)$$

$$\text{ind}(\eta, z) = \text{ind } \eta$$

**2.2. REMARQUES :** . La démonstration de Panyushev utilise l'inégalité du paragraphe 1.

• Toujours sous l'hypothèse “ $\eta.\ell_0 = \delta^*$ ”, les relations trouvées ci-dessus liant  $z^{\ell_1}$ ,  $\eta^\ell$  et  $\eta.\ell_1$  montrent que les 3 assertions suivantes sont 2 à 2 équivalentes :

- .  $\ell$  est un élément régulier de  $\eta^*$  (i.e.  $\dim \eta^\ell = \text{ind}(\eta)$ )
- .  $\ell_1$  est un élément régulier de  $z^*$  (i.e.  $\dim z^{\ell_1} = \text{ind } z$ )
- .  $\ell_1$  est un élément régulier de  $z^*$ , pour la représentation naturelle de  $\eta$  dans  $z^*$  (i.e.  $\text{codim}(\eta.\ell_1) = \text{ind}(\eta, z)$ ).

**2.3.** On se permettra d'exprimer la condition “ $\text{ind}(\eta, \delta) = 0$ ” en disant que  $\eta$  admet une orbite ouverte dans  $\delta^*$ . Comme expliqué ci-dessus, Panyushev démontre les formules des indices de  $\eta$ , de  $z, \dots$ , sous cette condition.

QUESTION 1 : Est-ce que “ $\text{ind}(\eta, \delta) = 0$ ” équivaut à “ $\text{ind}(\eta) = \text{ind}(z) - \dim \delta$  et :  $\text{ind}(\eta, z) = \text{ind } \eta$ ” ?

**2.4.** On trouve dans [Pa] une liste de cas où il est prouvé que la condition “ $\text{ind}(\eta, \delta) = 0$ ” est vérifiée (y voir le théorème 4.7). Il faut noter que dans tous ces cas, Panyushev démontre une propriété plus forte que celle de l'orbite ouverte, à savoir :  $\eta$  admet dans  $\delta^*$  un nombre fini d'orbites.

**2.5.** Dans le cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ , on présente ci-dessous une démonstration très peu différente de celle de Panyushev. Soit  $e$  un élément nilpotent non nul de  $\mathfrak{sl}(n)$  ; le centre  $\delta$  du centralisateur  $z$  de  $e$  admet  $(e, e^2, \dots, e^r)$  comme base,  $r$  étant l'entier vérifiant :  $r \geq 1$ ,  $e^r \neq 0$ ,  $e^{r+1} = 0$ . Soit  $h$  dans  $\mathfrak{sl}(n)$  tel que  $[h, e] = 2e$  ; alors  $[he^k, e] = 2e^{k+1}$  (ici  $he^k$  est le produit effectué dans l'algèbre associative des matrices), et  $[he^k, e^\ell] = 2\ell e^{k+\ell}$ . Quitte à projeter (s'il le faut) les  $he^k$  dans  $\mathfrak{sl}(n)$ , parallèlement à l'espace des matrices scalaires, on peut affirmer : il existe  $x_0, x_1, \dots, x_{r-1}$  dans  $\mathfrak{sl}(n)$  tels que :  $[x_k, e^\ell] = 2\ell e^{k+\ell}$  ( $0 \leq k \leq r-1$ ,  $1 \leq \ell \leq r$ ) ; par suite, le normalisateur  $\eta$  de  $z$  dans  $\mathfrak{sl}(n)$  s'écrit :  $\eta = z \oplus \mathfrak{q}$ , avec :  $\mathfrak{q} = \sum_{k=0}^{r-1} \mathbb{C} x_k$ . Soit  $\ell_0$  une forme linéaire sur  $\delta$  ; on pose

$\lambda_k = \langle \ell_0, e^k \rangle$  ( $1 \leq k \leq r$ ), de sorte que  $\ell_0 = \sum_1^r \lambda_k \xi_k$  où  $(\xi_1, \dots, \xi_r)$  est la base duale de  $(e, e^2, \dots, e^r)$ . On cherche la matrice  $A$  de l'application linéaire :  $x \mapsto x.\ell_0$ , de  $\mathfrak{q}$  dans  $\delta^*$ , relativement aux bases  $(x_0, x_1, \dots, x_{r-1})$  de  $\mathfrak{q}$  et  $(\xi_1, \dots, \xi_r)$  de  $\delta^*$  :

$$a_{ij} = \langle x_j.\ell_0, e^i \rangle = - \langle \ell_0, [x_j, e^i] \rangle = - \langle \ell_0, 2ie^{i+j} \rangle$$

d'où :  $a_{ij} = 0$  lorsque  $i > r - j$  et  $a_{ij} = -2i \lambda_{i+j}$  lorsque  $i + j \leq r$ . Il vient alors :  $|\det A| = 2^r(r!) \lambda_r^r$ .

Donc  $\text{ind}(\eta, \delta) = 0$  et  $\ell_0$  est une forme régulière, au sens :  $\eta.\ell_0 = \delta^*$ , si et seulement si :  $\langle \ell_0, e^r \rangle \neq 0$ .

(A quelques modifications près, cette démonstration -(encore une fois, c'est celle de Panyushev, habillée une peu différemment)- vaut pour les algèbres de Lie  $\mathfrak{so}(2n+1)$ ,  $\mathfrak{sp}_{2n}$  et pour certains types d'éléments nilpotents dans  $\mathfrak{so}(2n)$ , voir le théorème 4.7 de [Pa].)

• On va voir que dans cet exemple, on peut calculer l'indice de l'algèbre  $\eta/z$ . On a :  $[he^k, he^\ell] = 2(\ell - k)h e^{k+\ell}$  ( $= 0$  lorsque  $k + \ell \geq r + 1$ ). De plus  $[h e^r, e] = 2 e^{r+1} = 0$ , d'où  $h e^r \in z$ . De ceci il résulte que  $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{r-1})$ , (où  $\bar{x}_j = x_j \bmod z$ ) est une base de  $\eta/z$ , avec les crochets :

$$[\bar{x}_k, \bar{x}_\ell] = 2(\ell - k)\bar{x}_{k+\ell} \text{ lorsque } k + \ell \leq r - 1 \\ = 0 \text{ dans les autres cas.}$$

Soit  $\lambda$  une forme linéaire sur  $\eta/z$ ,  $\lambda = \sum_0^{r-1} \lambda_k \eta_k$ , où  $(\eta_0, \dots, \eta_{r-1})$  est la base duale de  $(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{r-1})$ , et soit  $A$  la matrice de l'application  $x \mapsto x.\lambda$  de  $\eta/z$  dans son dual, relativement aux bases  $(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{r-1})$  et  $(\eta_0, \dots, \eta_r)$  :

$$a_{ij} = \langle \bar{x}_j.\lambda, \bar{x}_i \rangle = \langle \lambda, [\bar{x}_i, \bar{x}_j] \rangle = 0 \text{ lorsque } i + j \geq r \\ a_{ij} = 2(j - i)\lambda_{i+j} \text{ lorsque } i + j \leq r - 1.$$

A nouveau :  $\det A = c \lambda_{r-1}^r$  avec  $c \in \mathbb{C}$ , et  $c \neq 0$  si et seulement si  $r$  est pair. Lorsque  $r$  est impair, il y a un et un seul élément sur l'anti-diagonale de  $A$  qui soit nul, et il vient que  $A$  admet un mineur non nul de taille  $(r - 1)$ .

Conclusion : L'algèbre de Lie  $\eta/z$  est d'indice zéro (resp. d'indice 1) lorsque sa dimension est paire (resp. impaire).

QUESTION 2 : Quel est l'indice de  $\eta/z$  (au moins lorsque  $\text{ind}(\eta, \delta) = 0$ ) ?

• Dans les exemples matriciels traités ci-dessus, on constate que, aussi bien pour la représentation naturelle de  $\eta$  dans  $\delta$  que pour la représentation adjointe de  $\eta/z$ , les formes linéaires régulières sont caractérisées par le fait qu'elles ne s'annulent pas sur l'élément de plus grande  $h$ -gradation. On dispose par ailleurs d'une application linéaire  $ad(e) : \eta \longrightarrow \delta$ , dont le noyau est  $z$ , de sorte que cette application induit un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $\eta/z$  sur  $\delta$ , qu'on continuera à noter  $ad(e)$ . On voit alors que, lorsque  $\ell_0$  est une forme linéaire sur  $\delta$ , on a l'équivalence des 2 assertions suivantes :

- $\ell_0$  est un élément régulier au sens de :  $\eta.\ell_0 = \delta^*$
- $\ell_0 \circ ad(e)$  est un élément régulier de  $(\eta/z)^*$ .

### 3 Des cas d'égalité dans l'inégalité de Panyushev

**3.1.** On reprend les notations du paragraphe 1 :  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie,  $\mathfrak{a}$  en est un idéal,  $\ell$  est une forme linéaire sur  $\mathfrak{g}$  et  $\ell_0$  est sa restriction à  $\mathfrak{a}$ . On a alors, de façon évidente :  $\mathfrak{a}^{\ell_0} + \mathfrak{g}^\ell \subset \mathfrak{a}^\ell$  et l'inégalité qui exprime que la dimension de l'espace vectoriel  $\mathfrak{a}^{\ell_0} + \mathfrak{g}^\ell$  est majorée par celle de  $\mathfrak{a}^\ell$  s'écrit :

$$\dim \mathfrak{a}^{\ell_0} + \dim \mathfrak{g}^\ell \leq \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) + 2 \text{ codim}(\mathfrak{g}.\ell_0).$$

On en a déduit l'inégalité de Panyushev. On s'intéresse aux cas d'égalité dans cette inégalité.

**Lemme** : Notons  $\Omega$  l'ouvert de Zariski dans  $\mathfrak{g}^*$  constituée par les formes linéaires  $\ell$  telles que  $\text{codim}(\mathfrak{g}.\ell_0) = \text{ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  (i.e. telles que  $\ell_0 = \ell|_{\mathfrak{a}}$  soit un élément régulier pour la représentation naturelle de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{a}$ ).

L'égalité :  $\text{ind } \mathfrak{a} + \text{ind } \mathfrak{g} = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) + 2 \text{ ind } (\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  est réalisée si et seulement si :

$$\text{Pour toute } \ell \text{ dans } \Omega, \text{ on a : } \mathfrak{a}^{\ell_0} + \mathfrak{g}^\ell = \mathfrak{a}^\ell.$$

DÉMONSTRATION : . Supposons réalisée l'égalité de Panyushev. Soit  $\ell$  dans  $\Omega$ . On a alors :  $\dim \mathfrak{a}^{\ell_0} + \dim \mathfrak{g}^\ell \leq \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) + 2 \operatorname{ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  et  $\operatorname{ind} \mathfrak{a} + \operatorname{ind} \mathfrak{g} = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) + 2 \operatorname{ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \leq \dim \mathfrak{a}^{\ell_0} + \dim \mathfrak{g}^\ell \leq \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) + 2 \operatorname{ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ .

Donc  $\dim \mathfrak{a}^{\ell_0} + \dim \mathfrak{g}^\ell = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{a} + 2 \operatorname{ind}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$  (d'où résulte d'ailleurs que  $\ell$  et  $\ell_0$  sont des formes linéaires régulières respectivement sur les algèbres de Lie  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{g}$ ), et ainsi :

$$\dim \mathfrak{a}^{\ell_0} + \dim \mathfrak{g}^\ell = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) + 2 \operatorname{codim}(\mathfrak{g}, \ell_0)$$

c'est-à-dire :  $\dim(\mathfrak{a}^{\ell_0} + \mathfrak{g}^\ell) = \dim \mathfrak{a}^\ell$ .

. Supposons qu'on ait, pour tout  $\ell$  dans  $\Omega$  :

$$\mathfrak{a}^{\ell_0} + \mathfrak{g}^\ell = \mathfrak{a}^\ell$$

c'est-à-dire :  $\dim \mathfrak{a}^{\ell_0} + \dim \mathfrak{g}^\ell = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{a} + 2 \operatorname{ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ .

Dans l'ouvert de Zariski  $\Omega$ , on peut trouver  $\ell$  qui soit une forme régulière sur  $\mathfrak{g}$  et telle que  $\ell_0 = \ell|_{\mathfrak{a}}$  soit une forme régulière sur  $\mathfrak{a}$ . Donc :  $\operatorname{ind} \mathfrak{a} + \operatorname{ind} \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{a} + 2 \operatorname{ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ .

**3.2.** On se restreint, jusqu'à mention explicite du contraire, au cas où l'idéal  $\mathfrak{a}$  est abélien, où il est plus facile de reconnaître les cas d'égalité.

On notera dans ce cas que  $\mathfrak{a}^{\ell_0} = \mathfrak{a}$ , et que la sous-algèbre  $\mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell$  est subordonnée à  $\ell$ , tandis que  $\mathfrak{a}^\ell$  est co-isotrope.

**Lemme :** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $\operatorname{ind}(\mathfrak{g}) + \dim \mathfrak{a} = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) + 2 \operatorname{ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ .
- (2) Pour toute  $\ell$  dans  $\Omega$ , on a :  $\mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell = \mathfrak{a}^\ell$ .
- (3) Pour toute  $\ell$  dans  $\Omega$ ,  $\mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell$  est une polarisation en  $\ell$ .
- (4) Pour toute  $\ell$  dans  $\Omega$ ,  $\mathfrak{a}^\ell$  est une polarisation en  $\ell$ .

DÉMONSTRATION : . L'équivalence de (1) et (2) a été prouvée.

. Soit  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}^*$  telle que  $\mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell = \mathfrak{a}^\ell$ . Alors  $(\mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell)^\ell = (\mathfrak{a}^\ell)^\ell = \mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell$ . Donc  $\mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell$  est une polarisation en  $\ell$ .

. Soit  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}^*$  telle que  $(\mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell)$  soit une polarisation en  $\ell$ , i.e. telle que  $\mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell = (\mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell)^\ell$ ; comme  $(\mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell)^\ell = \mathfrak{a}^\ell$ , on a :  $\mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell = \mathfrak{a}^\ell$ , ce qui s'écrit :  $\mathfrak{a}^\ell = (\mathfrak{a}^\ell)^\ell$ .

. Soit  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}^*$  telle que  $\mathfrak{a}^\ell$  soit une polarisation en  $\ell$ . Alors  $\mathfrak{a}^\ell = (\mathfrak{a}^\ell)^\ell = \mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell$ .

Ceci montre que les conditions (2), (3), (4) sont 2 à 2 équivalentes.

**3.3.** On examine ici plus particulièrement le cas où  $\mathfrak{a}$  est un idéal abélien qui est facteur direct, i.e. on suppose qu'il existe une sous-algèbre  $\mathfrak{q}$  de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \oplus \mathfrak{a}$ . Lorsqu'il en est ainsi, on a :  $\mathfrak{a}^\ell = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{q}(\ell_0)$ , où  $\mathfrak{q}(\ell_0)$  est l'annulateur de  $\ell_0$  dans  $\mathfrak{q}$ , i.e. l'ensemble des  $x$  dans  $\mathfrak{q}$  tels que :  $\langle \ell, [x, \mathfrak{a}] \rangle = 0$ , et ce pour toute forme linéaire  $\ell$ .

**Lemme :** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $\text{ind } \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{a} = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) + 2 \text{ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ .
- (2) *Pour toute  $\ell$  dans  $\Omega$ , le “stabilisateur générique”  $\mathfrak{q}(\ell_0)$  est abélien.*

DÉMONSTRATION : . On suppose que (1) est vérifiée. Soit  $\ell$  dans  $\Omega$ ; alors  $\mathfrak{a}^\ell = \mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell$ , i.e. :  $\mathfrak{a}^\ell = \mathfrak{a} + \mathfrak{q}(\ell_0)$ ; comme  $\ell$  est régulière,  $\mathfrak{g}^\ell$  est abélienne, d'où :  $[\mathfrak{a}^\ell, \mathfrak{a}^\ell] \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}^\ell] \subset \mathfrak{a}$ ; en utilisant l'égalité  $\mathfrak{a}^\ell = \mathfrak{a} + \mathfrak{q}(\ell_0)$ , il vient :  $[\mathfrak{q}(\ell_0), \mathfrak{q}(\ell_0)] \subset \mathfrak{a}$ , d'où  $\mathfrak{q}(\ell_0)$  est abélienne.

. On suppose que (2) est vérifiée. Soit  $\ell_0$  dans  $\mathfrak{a}^*$  telle que  $\mathfrak{q}(\ell_0)$  soit abélienne, et soit  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}^*$ , telle que  $\ell_0 = \ell|_{\mathfrak{a}}$ . On a alors :

$$\langle \ell, [\mathfrak{a} + \mathfrak{q}(\ell_0), \mathfrak{a} + \mathfrak{q}(\ell_0)] \rangle = \langle \ell, [\mathfrak{a}, \mathfrak{q}(\ell_0)] \rangle = 0$$

par définition de  $\mathfrak{q}(\ell_0)$ . Ceci exprime que  $\mathfrak{a} + \mathfrak{q}(\ell_0) = \mathfrak{a}^\ell$  est une sous-algèbre subordonnée à la forme linéaire  $\ell$ . Comme par ailleurs  $\mathfrak{a}^\ell$  est co-isotrope relativement à  $\ell$  ( $(\mathfrak{a}^\ell)^\ell = \mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell \subset \mathfrak{a}^\ell$ ), on a nécessairement  $\mathfrak{a}^\ell = (\mathfrak{a}^\ell)^\ell = \mathfrak{a} + \mathfrak{g}^\ell$ , i.e. :  $\mathfrak{a}^\ell$  est une polarisation en  $\ell$ .

. Ce lemme permet de donner un certain nombre d'exemples où il y a égalité :

1. Soit  $\mathfrak{q}$  une algèbre de Lie simple et soit  $\rho : \mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$  une représentation linéaire de dimension finie. Lorsque cette dimension est strictement supérieure à celle de  $\mathfrak{q}$ , il est connu que le stabilisateur générique est réduit à  $\{0\}$ . Il y a donc égalité dans l'inégalité de Panyushev pour  $\mathfrak{g} = V \ltimes_{\rho} \mathfrak{q}$ , avec  $\mathfrak{a} = V \times \{0\}$ .
2. Soit  $\mathfrak{q}$  une algèbre de Lie et soit :  $\rho : \mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{q})$  sa représentation adjointe. On désigne par  $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \ltimes_{\rho} \mathfrak{q}$  l'algèbre de Lie produit semi-direct associé à cette représentation. On sait ([Ra]) que :  $\text{ind } \mathfrak{g} = 2 \text{ind } \mathfrak{q}$ . On a donc, avec  $\mathfrak{a} = \mathfrak{q} \times \{0\}$  :

$$\text{ind } \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{a} = 2 \text{ind } \mathfrak{q} + \dim \mathfrak{q}$$

$$\text{et } \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) + 2 \text{ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \dim \mathfrak{q} + 2 \text{ind } \mathfrak{q}.$$

Il y a donc égalité, ce qui peut se voir a priori en notant que le stabilisateur générique de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie est abélien.

**3.4.** On notera enfin une autre caractérisation du cas d'égalité, toujours lorsque  $\mathfrak{a}$  est abélien, qui est susceptible d'avoir une interprétation géométrique.

**Lemme :** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $\text{ind } \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{a} = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) + 2 \text{ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ .
- (2) *Pour toute  $\ell$  dans  $\Omega$ , on a :  $\dim(\mathfrak{g}.\ell) = 2 \dim(\mathfrak{g}.\ell_0)$ .*

En effet, l'égalité (1) s'écrit :

$$\dim \mathfrak{g} - \text{ind } \mathfrak{g} = 2(\dim \mathfrak{a} - \text{ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})).$$

**3.5.** Il y a des exemples intéressants où  $\mathfrak{a}$  n'est pas abélien et où il y a égalité dans l'inégalité de Panyushev. On en donne ci-dessous une liste probablement incomplète.

1. Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie simple complexe et soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ , “la” décomposition triangulaire bien connue :  $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$  est une sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{n}_+$  en est le radical nilpotent. Panyushev, dans [Pa], examine cet exemple parmi d’autres (Remarks 1.5.1) et note que son inégalité (avec  $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}_+$ , idéal de  $\mathfrak{b}$ ) s’écrit :  $\text{ind}(\mathfrak{b}) + \text{ind}(\mathfrak{n}_+) \leq \dim(\mathfrak{b}/\mathfrak{n}_+) = \text{rg}(\mathfrak{g})$ , car  $\text{ind}(\mathfrak{b}, \mathfrak{n}_+) = 0$  d’après un résultat de A. Joseph. Il dit aussi qu’il peut être “conceptuellement” prouvé qu’il y a égalité :  $\text{ind}(\mathfrak{b}) + \text{ind}(\mathfrak{n}_+) = \text{rg}(\mathfrak{g})$ .
2. On reprend les notations du paragraphe 2. On va voir que l’égalité de Panyushev est réalisée lorsqu’on prend  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}$  et  $\mathfrak{a} = z$  (qui n’est commutatif que lorsque  $z$  est le centralisateur d’un élément nilpotent principal). On a en effet :

$$\text{ind } \mathfrak{n} + \text{ind } z = 2 \text{ ind } \mathfrak{n} + \dim \delta$$

$$\dim(\mathfrak{n}/z) + 2 \text{ ind}(\mathfrak{n}, z) = \dim \delta + 2 \text{ ind } \mathfrak{n}$$

(On a appliqué les formules de l’indice de Panyushev).

En particulier, lorsque  $z$  est commutatif, i.e. lorsque  $z = \delta$ , on a un cas d’égalité avec  $\mathfrak{a}$  commutatif. On constate que lorsqu’on prend  $\mathfrak{a} = \delta$ , l’inégalité de Panyushev est stricte sauf lorsque  $z = \delta$ .

3. On considère l’algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  du groupe de Mautner ;  $\mathfrak{g}$  admet  $(P, Q, E, X)$  comme base avec :

$$[P; Q] = E, \quad [X, P] = Q, \quad [X, Q] = -P$$

• L’indice de  $\mathfrak{g}$  est évidemment 2. On considère l’idéal  $\mathfrak{a}$  admettant  $(P, Q, E)$  comme base ; c’est l’algèbre de Heisenberg de dimension 3 ; donc  $\text{ind}(\mathfrak{a}) = 1$  et ainsi :

$$\text{ind}(\mathfrak{g}) + \text{ind}(\mathfrak{a}) = 3.$$

• Un calcul direct montre que  $\text{ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = 1$ . Donc :

$$\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) + 2 \text{ ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = 3.$$

QUESTION 3 : Caractériser les cas d’égalité dans l’inégalité de Panyushev.

## 4 L’indice des contractions

4.1. Soit  $[\cdot, \cdot]$  une loi d’algèbre de Lie sur un espace vectoriel  $V$ . Pour chaque  $g$  dans  $GL(V)$  :

$$[x, y]_g = g([\bar{g}^1 \cdot x, \bar{g}^1 y]) \quad (x, y) \in V^2$$

définit une (nouvelle) algèbre de Lie sur  $V$ , et l’ensemble de ces structures d’algèbres de Lie est l’orbite de  $[\cdot, \cdot]$  sous l’action (naturelle) de  $GL(V)$  décrite plus haut.

Par définition, on appelle contraction de l’algèbre de Lie  $[\cdot, \cdot]$  toute algèbre de Lie qui appartient à l’adhérence de la  $GL(V)$ -orbite de  $[\cdot, \cdot]$ . Pour ce qui me concerne, il s’agit de l’adhérence dans l’espace vectoriel complexe (ou réel) constitué par les applications bilinéaires alternées de  $V \times V$  dans  $V$ .

Il est immédiat que l'indice ne varie pas le long de l'orbite de  $[\cdot, \cdot]$ , et que par contre, il se peut qu'il augmente en certains points de l'adhérence de cette orbite. En tout cas :  $\text{ind } \mathfrak{g} \leq \text{ind } \mathfrak{h}$  lorsque  $\mathfrak{h}$  est une contraction de  $\mathfrak{g}$ .

**4.2.** Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie et soit  $\mathfrak{k}$  une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ , qui opère naturellement dans  $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ . Il est bien connu que l'algèbre de Lie  $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \ltimes \mathfrak{k}$ , produit semi-direct relatif à cette opération de  $\mathfrak{k}$  dans l'espace vectoriel  $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$  (considéré comme algèbre de Lie abélienne), est une contraction de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  (dite d'Inonu-Wigner) (voir par exemple [C], proposition 1.3 (2)).

**4.3.** Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  une décomposition de Cartan d'une algèbre de Lie simple réelle. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{p} \ltimes_{\text{ad}} \mathfrak{k}$ , produit semi-direct de  $\mathfrak{k}$  par l'abéliannisée  $\mathfrak{p}$ , relativement à l'action adjointe de  $\mathfrak{k}$  dans  $\mathfrak{p}$ , est connue comme étant l'algèbre de Lie du groupe des déplacements de Cartan. D'après ce qu'on vient de dire, c'est une contraction de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .

**Proposition :** *Les algèbres de Lie  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{p} \ltimes_{\text{ad}} \mathfrak{k}$  ont même indice.*

DÉMONSTRATION : Soit  $\mathfrak{a}$  un sous-espace de Cartan de  $\mathfrak{p}$ . On note  $G$  et  $K$  les groupes associés à  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{k}$  respectivement. On sait que la dimension maximale des  $K$ -orbites dans  $\mathfrak{p}$  (ou dans  $\mathfrak{p}^*$ , puisque la forme de Killing met  $\mathfrak{p}$  en dualité avec lui-même) est :  $\dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{a}$ . On a donc :

$$\text{ind}(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = \dim \mathfrak{a} (= \text{rg}(G/K)).$$

Soit  $\mathfrak{m}$  l'annulateur dans  $\mathfrak{k}$  d'un élément régulier de  $\mathfrak{a}$ , et soit  $\mathfrak{t}$  un tore maximal de  $\mathfrak{m}$ . On sait que :  $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , de sorte que :

$$\text{rg}(\mathfrak{g}) (= \text{ind } \mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{t} + \dim \mathfrak{a}$$

avec :  $\dim \mathfrak{t} = \text{ind}(\mathfrak{m})$  et  $\dim \mathfrak{a} = \text{ind}(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ . Par ailleurs, d'après la formule de l'indice des produits semi-directs ([Ra]) :

$$\text{ind}(\mathfrak{p} \ltimes_{\text{ad}} \mathfrak{k}) = \text{ind}(\mathfrak{m}) + \text{ind}(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}).$$

Donc :  $\text{ind}(\mathfrak{g}) = \text{ind}(\mathfrak{p} \ltimes_{\text{ad}} \mathfrak{k})$ .

**4.4. REMARQUES :** D'après une communication privée de Panyushev ([Pa 2]), ce résultat est un cas particulier d'un fait plus général depuis longtemps connu de lui :

**Théorème :** *Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie réductive complexe,  $G$  le groupe connexe associé,  $K$  un sous-groupe réductif de  $G$ ,  $\mathfrak{k}$  l'algèbre de Lie de  $K$ , et  $\mathfrak{p}$  l'orthogonal de  $\mathfrak{k}$  dans  $\mathfrak{g}$  (relatif à une forme bilinéaire invariante). On a alors :*

$$\text{ind}(\mathfrak{p} \ltimes \mathfrak{k}) - \text{ind } \mathfrak{g} = 2 \text{ comp.}(G/K)$$

où  $\text{comp.}(G/K)$  est la complexité de  $G/K$ .

et qu'il dit n'avoir pas publié explicitement. Par contre, une démonstration adhoc du corollaire suivant se trouve dans ([Pa], theorem 3.5).

**Corollaire :** *Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  une  $\mathbb{Z}_2$ -graduation. Alors  $\text{ind}(\mathfrak{g}) = \text{ind}(\mathfrak{p} \ltimes \mathfrak{k})$ .*



Ainsi, lorsque  $K$  est un sous-groupe réductif de  $G$ ,  $\text{ind}(\mathfrak{g}) = \text{ind}((\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \ltimes \mathfrak{k})$  si et seulement si  $K$  est un sous-groupe sphérique de  $G$ .

**4.5.** Voici un autre exemple de contraction ayant le même indice que celui de la contractée. On reprend  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$  comme dans 3.5 ci-dessus, et  $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ . Alors la forme de Killing permet d'identifier  $(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^*$  à  $\mathfrak{n}_+$  et l'opération naturelle de  $\mathfrak{b}$  dans  $(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^*$  se lit comme étant l'opération adjointe de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{b}$  dans son idéal  $\mathfrak{n}_+$ . On sait que  $\text{ind}(\mathfrak{b}, \mathfrak{n}_+) = 0$ , et précisément le stabilisateur générique est abélien. D'après la formule de l'indice ([Ra]) :

$$\text{ind}((\mathfrak{g}/\mathfrak{b}) \ltimes \mathfrak{b}) = rg(\mathfrak{g})$$

puisque le stabilisateur générique est de dimension égale à :  $\dim \mathfrak{b} - \dim \mathfrak{n}_+ = rg(\mathfrak{g})$ .

QUESTION 4 : Après un certain nombre de travaux consacrés à “l’analogie” entre l’analyse harmonique sur  $G$  et sur son contracté  $\mathfrak{p} \ltimes K$  (représentations unitaires irréductibles des 2 groupes, classes de conjugaison des 2 groupes...) il serait intéressant de comprendre les relations entre les algèbres d’invariants polynomiaux des 2 groupes, et de même que celles entre les centres des algèbres enveloppantes respectives des 2 algèbres de Lie.

QUESTION 4 BIS : Est-ce que  $\text{ind}((\mathfrak{g}/\mathfrak{p}) \ltimes \mathfrak{p}) = rg(\mathfrak{g})$  lorsque  $\mathfrak{p}$  est une sous-algèbre parabolique de  $\mathfrak{g}$  ?

**4.6.** Il se peut que la remarque tout à fait élémentaire selon laquelle l’indice d’une contraction majore celui de la contractée puisse être utile pour calculer certains indices.

Par exemple : Soit  $z$  comme dans le paragraphe 2 ci-dessus ; on sait, d’après le lemme de Vinberg, que l’indice de  $z$  est minoré par le rang de  $\mathfrak{g}$ . S’il existe une contraction  $\mathfrak{h}$  de  $z$  dont l’indice est majoré par le rang de  $\mathfrak{g}$ , on aura :

$$rg(\mathfrak{g}) \leq \text{ind } z \leq \text{ind } \mathfrak{h} \leq rg(\mathfrak{g})$$

d’où  $\text{ind } z = rg(\mathfrak{g})$ , ce qui assure dans ce cas la validité de la conjecture dite d’Elashvili. Cela suppose évidemment de connaître des contractions de  $z$  et de savoir calculer leurs indices. Il y a au moins une possibilité, chaque fois qu’on dispose d’une sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{k}$  de  $z$  : on prend  $\mathfrak{h} = (z/\mathfrak{k}) \ltimes \mathfrak{k}$  et on peut utiliser la formule de [Ra] pour en calculer l’indice. Plus particulièrement, d’après un théorème classique de Kostant, il existe une sous-algèbre abélienne  $\mathfrak{k}$  de dimension  $r$  (où on note  $r$  le rang de  $\mathfrak{g}$ ), et dans ce cas, l’application de la formule de l’indice s’en trouve facilitée (le stabilisateur générique est abélien, de sorte que son indice coïncide avec sa dimension).

EXEMPLE : On suppose  $e$  “sous-régulier” de sorte que  $\dim z = r + 2$ . On prend une sous-algèbre abélienne  $\mathfrak{k}$  de  $z$ , de dimension  $r$ , de sorte que  $z/\mathfrak{k}$  est de dimension 2. Les orbites de dimension maximale  $d$  pour l’opération naturelle de  $\mathfrak{k}$  dans le dual de  $(z/\mathfrak{k})$  sont évidemment telles que :  $d = 0, 1$  ou  $2$ .

• Lorsque  $d = 2$ , l’indice de la représentation de  $\mathfrak{k}$  dans  $(z/\mathfrak{k})$  est zéro, tandis que le stabilisateur générique dans  $\mathfrak{k}$  est de dimension  $(r - 2)$ . Donc :  $\text{ind}((z/\mathfrak{k}) \ltimes \mathfrak{k}) = r - 2$ . Ce cas est impossible.

- Lorsque  $d = 1$ , le même raisonnement donne :

$$\text{ind}((z/\mathfrak{k}) \ltimes \mathfrak{k}) = r.$$

- Lorsque  $d = 0$ , le même raisonnement donne :

$$\text{ind}((z/\mathfrak{k}) \ltimes \mathfrak{k}) = r + 2.$$

Le troisième cas est celui où  $\mathfrak{k}$  est un idéal de  $z$ . En conclusion : si  $\mathfrak{k}$  est une sous-algèbre abélienne de  $z$ , de dimension  $r$ , et qui n'est pas un idéal de  $z$ , alors :  $\text{ind}((z/\mathfrak{k}) \ltimes \mathfrak{k}) = r$ .

Le fait que l'indice de  $z$ , dans ce cas ( $e$  sous-régulier), vaut  $r$  a été démontré en 2 lignes par Panyushev (3.4, Corollary dans [Pa]). Noter toutefois qu'il utilise la caractérisation des nilpotents principaux par la commutativité de leurs centralisateurs.

QUESTION 5 : Existe-t-il toujours une sous-algèbre abélienne, de dimension  $r$ , qui ne soit pas un idéal de  $z(e)$ ,  $e$  étant un nilpotent sous-régulier ?

## 5 Des exemples d'additivité de l'indice

Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$  une décomposition d'une algèbre de Lie en somme directe de 2 sous-algèbres de Lie  $\mathfrak{g}_0$  et  $\mathfrak{g}_1$ . On donne dans ce paragraphe des exemples de cette situation où  $\text{ind}(\mathfrak{g}) = \text{ind}(\mathfrak{g}_0) + \text{ind}(\mathfrak{g}_1)$ .

**5.1.** Soient  $e$  un élément nilpotent dans une algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$  et  $z$  le centralisateur de  $e$ . Supposons que  $z$  soit Lie-complémenté, i.e. qu'il existe une sous-algèbre  $\mathfrak{g}_1$  de  $\mathfrak{g}$  telle que :  $\mathfrak{g} = z \oplus \mathfrak{g}_1$  (des exemples de cette situation ont été décrits dans [Ra 2] et dans [Sa]).

On sait, dans ce cas, que  $\mathfrak{g}_1$  est d'indice zéro. Par conséquent “ $\text{ind}(\mathfrak{g}) = \text{ind } z + \text{ind } \mathfrak{g}_1$ ” équivaut à : “ $\text{ind } z = rg(\mathfrak{g})$ ” i.e., équivaut à la validité de la conjecture d'Elashvili. Lorsque  $e$  est un élément d'une orbite sphérique, on a bien :  $\text{ind}(z) = rg(\mathfrak{g})$  ([Pa], theorem 3.5) et ([Pa 3], theorem 3.5), et d'après ([Sa], théorème 3.3)  $z$  est Lie-complémenté de sorte que :

Lorsque  $e$  appartient à une orbite sphérique, il existe des sous-algèbres  $\mathfrak{g}_1$  telles que :  $\mathfrak{g} = z \oplus \mathfrak{g}_1$  et pour chaque telle sous-algèbre  $\mathfrak{g}_1$ , on a :

$$\text{ind } \mathfrak{g} = \text{ind } z + \text{ind } \mathfrak{g}_1.$$

**5.2.** Pour des raisons de commodité,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$  (le cas  $sl(n)$  s'en déduit). Soit  $p$  un diviseur de  $n$ , et soit  $e = J^p$  où :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice de Jordan de taille  $n$ . D'après [Ra 3], l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_1$ , constituée par les matrices ayant leurs  $p$  dernières lignes nulles, est d'indice zéro, et le centralisateur  $z$  de  $e$  dans  $\mathfrak{gl}(n)$  est l'algèbre de Lie constituée par les matrices dont l'écriture en blocs  $p \times p$ , est la suivante :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_1 & & \\ A_2 & & \ddots & \\ \vdots & A_2 & & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ A_k & \dots & & A_2 & A_1 \end{pmatrix} \quad (n = kp)$$

où les  $A_i$  sont des matrices  $p \times p$  quelconques. On a alors :  $\mathfrak{gl}(n) = z \oplus \mathfrak{g}_1$ . On voit facilement que l'application qui associe à chaque matrice, du type précédent, l'expression :  $A_1 + tA_2 + \dots + t^{k-1}A_k$  est un isomorphisme de l'algèbre de Lie  $z$  sur une algèbre de Takiff généralisée, du type de celles étudiées dans [R-T]. Du théorème 2.8 de l'article cité, on déduit :  $\text{ind}(z) = kp = n$ . Ainsi  $\text{ind}(z) = \text{rg}(\mathfrak{g})$  pour ce type de centralisateur.

On notera que d'après ([Pa], 3.6), la conjecture  $\text{ind}(z) = \text{rg}(\mathfrak{g})$  aurait été démontrée dans beaucoup de cas (y compris celui de  $sl(n)$ ) par Elashvili, mais que ses calculs n'ont pas été publiés.

**5.3.** Ici  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ ,  $\mathfrak{g}_0 = so(n)$ ,  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{b}$  (l'algèbre de Lie des matrices triangulaires supérieures), de sorte que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ . On sait que :

$$\text{ind } \mathfrak{g}_0 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ et } \text{ind } \mathfrak{g}_1 = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

et il vient immédiatement :  $\text{ind } \mathfrak{g}_0 + \text{ind } \mathfrak{g}_1 = n = \text{rg}(\mathfrak{g})$ .

**QUESTION 6 :** Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  une décomposition de Cartan comme dans 4.3 ci-dessus. On sait que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b}$  avec  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  (les notations sont classiques), i.e. :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  est une décomposition d'Iwasawa de  $\mathfrak{g}$ .

A-t-on :  $\text{ind } \mathfrak{g} = \text{ind}(\mathfrak{k}) + \text{ind}(\mathfrak{b})$  ?

#### 5.4.

1. Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$  une décomposition triangulaire de  $\mathfrak{g}$ , comme dans 3.5 ci-dessus. On a alors  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b}$ , avec  $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ , et comme déjà dit dans 3.5.a, ([Pa], 1.5.1), on a :  $\text{ind } \mathfrak{g} = \text{ind}(\mathfrak{b}) + \text{ind}(\mathfrak{n}_-)$ , donc :

$$\text{ind}(\mathfrak{g}) = \text{ind}(\mathfrak{n}_-) + \text{ind}(\mathfrak{b}).$$

2. On notera que cet exemple est un cas particulier de la situation étudiée par B. Kostant ([Ko]) : soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple (sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), et soit  $\Phi$  une forme bilinéaire non dégénérée, symétrique et invariante sur  $\mathfrak{g}$  (disons la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ ). On note  $\theta$  une involution de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , ce qui permet de définir sur  $\mathfrak{g}$  un produit scalaire :

$$\langle x|y \rangle = \Phi(x, -\theta(y)) \quad (x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}.$$

Kostant dit d'une sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{g}$  qu'elle est "Lie-sommante" lorsque son orthogonal (pour la forme de Killing)  $\mathfrak{a}^\circ$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  ou, ce qui revient au même, lorsque son orthogonal (pour le produit scalaire introduit)  $\mathfrak{a}^\perp$  est lui-même une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ , de sorte qu'on a alors :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ . Kostant remarque que lorsque  $\mathfrak{a}$  est une sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$ , son orthogonal  $\mathfrak{a}^\circ$  est son radical nilpotent  $\mathfrak{p}^u$  (et  $\mathfrak{a}^\perp = \theta(\mathfrak{p}^u)$ ), de sorte que :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \theta(\mathfrak{p}^u)$  pour toute sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$ . Le cas où  $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$  est une sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}$  a été présenté ci-dessus, et on a bien :  $\text{ind}(\mathfrak{g}) = \text{ind}(\mathfrak{b}) + \text{ind}(\mathfrak{b}^u)$ .

3. Un autre exemple de cette situation : ici  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$  et  $\mathfrak{p}$  est l'algèbre de Lie constituée par les matrices  $(x_{ij})$  de trace nulle et telles que  $x_{n,1} = x_{n,2} = \dots = x_{n,n-1} = 0$  ; l'algèbre  $\mathfrak{p}$  est une sous-algèbre parabolique maximale de  $\mathfrak{g}$ , et la décomposition "orthogonale" de Kostant qui lui est associée est :  $\mathfrak{sl}(n) = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{q}$ , où  $\mathfrak{q}$  est l'ensemble des matrices  $y = (y_{ij})$  telles que :  $y_{ij} = 0$  lorsque  $1 \leq i \leq n-1$  et  $y_{nn} = 0$ . On remarquera que dans ce cas, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{q}$  est abélienne, de sorte que :  $\text{ind}(\mathfrak{q}) = \dim \mathfrak{q} = n-1$ . Comme  $\mathfrak{p}$  est d'indice zéro (c'est un cas particulier de ce qui est contenu dans 5.2 ci-dessus), on a ici aussi :  $\text{ind}(\mathfrak{g}) = \text{ind } \mathfrak{p} + \text{ind}(\mathfrak{p}^u)$ .

QUESTION 7 : Pour quel type de parabolique a-t-on :  $\text{ind}(\mathfrak{g}) = \text{ind } \mathfrak{p} + \text{ind } \mathfrak{p}^u$  ?

**5.5.** Il n'est pas vrai en général que lorsque  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$  est une décomposition en somme de 2 sous-algèbres de Lie, même si plus particulièrement il s'agit d'une décomposition à la Kostant, on ait :  $\text{ind } \mathfrak{g} = \text{ind } \mathfrak{g}_0 + \text{ind } \mathfrak{g}_1$ . Prenons  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(4)$  pour  $\mathfrak{g}_1$  l'algèbre de Lie des matrices dont les 2 dernières lignes sont nulles, et pour  $\mathfrak{g}_2$  celle des matrices dont les 2 premières lignes sont nulles. On a :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  et  $\text{ind}(\mathfrak{g}_1) = \text{ind}(\mathfrak{g}_2) = 0$  ([Ra] 2.16).

## Bibliographie

- [Dix] DIXMIER J., *Algèbres enveloppantes*. Paris, Gauthier-Villars, (1974).
- [Ko] KOSTANT B., *The solution to a generalized Toda Lattice and representation theory*. Adv. in Math., 34, (1979), 195-338.
- [Pa] PANYUSHEV D., *The index of a Lie algebra, the centralizer of a nilpotent element, and the normalizer of the centralizer*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 134, (2003), 41-59.
- [Pa 2] PANYUSHEV D., *Communication personnelle*.
- [Pa 3] PANYUSHEV D., *Some amazing properties of spherical nilpotent orbits*. Math. Z., 245, (2003), 557-580.
- [C] CARLES R., *Introduction aux déformations d'algèbres de Lie de dimension finie*. Publ. Départ. Math. Univ. Poitiers, no. 19, (1986).
- [Ra] RAÏS M., *L'indice des produits semi-directs  $E \times_{\rho} \mathfrak{g}$* . C.R.A.S. Paris, Ser. A, t. 287, (1978), 195-197.
- [Ra 2] RAÏS M., *Manuscrit*. (2002).
- [Ra 3] RAÏS M., *La représentation coadjointe du groupe affine*. Ann. Inst. Fourier, 28, no. 1, (1978), 207-237.

- [B-K] BRYLINSKI R. & KOSTANT B., *Nilpotent orbits, normality, and Hamiltonian group actions*. J. Amer. Math. Soc. 7, (1994), 269-298.
- [R-T] RAÏS M. & TAUVEL P., *Indice et polynômes invariants pour certaines algèbres de Lie*. J. Reine Angew. Math., 425, (1992), 123-140.
- [Sa] SABOURIN H., *Sur la structure transverse à une orbite nilpotente adjointe*. A paraître.